

# محاضرات الدفتر

القسم : رياضيات السنة : الرابعة / صبح المادة : صيغيات المحاضرة : الأولى

المجموعات المرتبة  
نقول عن العلاقة الثنائية  $R$  المعرفة على المجموعة غير الخالية  $E$  أنه علاقة ترتيب على  $E$  إذا وفقط إذا تحققت الشروط :

- (1) انعكاسية  $\forall x \in E : x R x$
- (2) تنافسية  $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$
- (3) متدية  $\forall x, y, z \in E : x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

من أجل إتمام ما سبق سنتكثف علاقة الترتيب  $R$  على  $E$  بكتابة  $x \leq y$  بدلا من  $x R y$  ،  
وفي حال وجود التباس نكتب  $x < y$  أي  $x \leq y$  و  $x \neq y$  ، وإذا كانت  $x$  و  $y$  غير مرتبة ترتيبا  
واحد .

إن المجموعة  $E$  المزودة بعلاقة ترتيب  $R$  تسمى مجموعة مرتبة

أولية :

- (1) مجموعة الزداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  المزودة بعلاقة الترتيب المألوفة هي مجموعة مرتبة
- (2) مجموعة الزداد الطبيعية  $\mathbb{N}^+$  (أي الموجب) المزودة بعلاقة الترتيب (لا  $x$ ) هي مجموعة مرتبة على الطريقة الطبيعية :
- وهي أيضا مجموعة مرتبة  $x \leq y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N}^+ : y = x + a$
- (3) مجموعة أجزاء المجموعة  $E$  التي نرمز لها بالرمز  $\mathcal{P}(E)$  المزودة بعلاقة الارتفاع  $x \subseteq y$  هي مجموعة مرتبة (حيث  $x$  مجموعة جزئية من  $y$ )  
سوف نستخدم الرمز التالي :
- $x \neq y : x$  ليس أقل من  $y$
- $x < y : x$  أصغر من  $y$  أي  $x \leq y$  و  $x \neq y$

ونقول عن العنصرين  $x$  و  $y$  أنهما متقاربان إذا كانت

$$x \leq y \text{ و } y \leq x$$

وإذا كانت قلنا ذلك فإننا نقول إن  $x$  و  $y$  غير متقاربين

نقول عن علاقة الترتيب  $R$  أنها ترتيب كلي إذا كانت كل عنصرين متقاربين . ونسحق عندئذ هذه  
المجموعة بالمجموعة المرتبة كليا أو سلسلة

أولية :

- (1)  $\mathbb{N}$  مع علاقة الترتيب العادية هي سلسلة (ترتيب كلي)



# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

- (2)  $N$  مع علاقة يتم لست  $N$   
(3)  $M$  مع علاقة الرتبة  $N$  لست  $N$

ملاحظة :

في حالة العلاقة إذا كان  $x$  فإن  $x$  في  $N$

الترتيب العكسي

لكن (ي، ب) مجموعة مرتبة يمكن كتابة تعريف علاقة  $R$  بين  $x$  و  $y$  :  $x < y$   
والتي تكون :  $x < y$  يمكن التحقق بسهولة أن  $R$  علاقة ترتيب بين  $x$   
من نوع العلاقة  $R$  بين  $x$  و  $y$  العلاقة العكسية للعلاقة  $R$

الترتيب المولد (أو متجهو علاقة الترتيب)

لكن (ي، ب) مجموعة مرتبة و  $A$  مجموعة جزئية من  $x$  فإن  $R$  علاقة الترتيب بين  $x$  و  $A$   
حيث  $R$  علاقة ترتيب بين  $A$  فنفرض  $R$  بالرمز  $R$  و المعرفة بالحد :  
إذا كان  $x < y$  و  $y \in A$  فتشعر هذه العلاقة  $R$  علاقة الترتيب المولد  
ب  $x$  و  $A$

مثال :

لكن البنية الرتبة  $(A, R)$  يمكن  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$   
فندرج  $A$  و  $R$  علاقة من أجل الترتيب المولد  $R$  بين  $x$  و  $y$  لست  $N$  لست  $N$   
لست  $N$

ترتيب الجداد :

لكن  $(A, R)$  في أسرة من المجموعات المرتبة  $R$  تعرف  $R$  مجموعة الجداد  $F = \{A_i\}_{i \in I}$

العلاقة :  $(A_i, A_j)$  (ي، ب)  $A_i \leq A_j$  إذا كان  $A_i$  من أجل  $A_j$  في  $I$

ويعين البرهان بسهولة أنه  $R$  هي علاقة ترتيب بين  $I$  :  $A_i \leq A_j$  في  $I$  فندرج  $R$   
علاقة ترتيب الجداد



# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

\* حالة خاصة

لتكن  $\mathcal{F}(E, F)$  مجموعة الدوال من  $E$  إلى  $F$  فيكون  $\mathcal{F}$  متعلقاً مع المجموعة  $F^E$  أي مع  $\prod_{x \in E} F_x$  حيث  $F_x = F$  أي أنه يمكن مطابقة كل  $x \in E$  بـ  $F$   $f: E \rightarrow F$

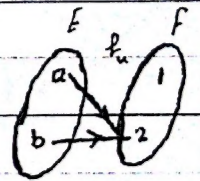
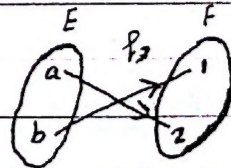
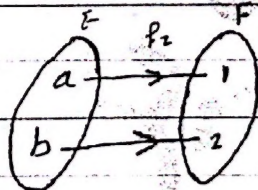
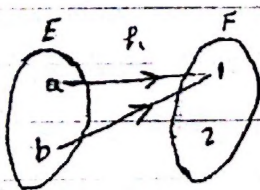
مع  $(f(x))$  فإذا كانت  $f$  مجموعة مرتبة عددياً تعرف عددياً ترتيب الدوال في المجموعة  $\mathcal{F}(E, F)$  بالترتيب التالي  $g \leq f$  إذا وفقط إذا كان  $g(x) \leq f(x)$   $\forall x \in E$

التوضيح :

إذا كانت  $E = \{a, b\}$  و  $F = \{1, 2\}$   $f$  عندها  $f^E = \mathcal{F}(E, F)$  ويمكن :

$$f^E = \mathcal{F} \times \mathcal{F} = \mathcal{F}^2$$

$$\mathcal{F}^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$



$f_1 \leq f_2$  إذا فصح

$$\begin{aligned} f_1(x) \leq f_2(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(a) \leq f_2(a) \\ f_1(b) \leq f_2(b) \end{cases} \\ \forall x \in E \end{aligned}$$

ملاحظة :

إذا كانت  $f_1 \leq f_2$  بالترتيب السابق

مثال :

في مجموع الدوال  $(\mathbb{N}, \leq)$  بناء الزوجين  $(1, 6)$  و  $(2, 8)$  يرتب بين أي  $(1, 2)$  ليست سلسلة



# محاضرات الدفتر

القسم :

السنة :

المادة :

المحاضرة :

مورفزمات المجموعة  $G$  المرتبة  $n$  :  
 لكن  $(F, \varphi)$  مجموعة جزئية من  $F$  تحلج من  $F$  إلى  $F$   
 حيث  $\varphi$  يتولد من  $f$  بأنه مورفزم ترتيب أو تحلج ترتيب إذا كانت  

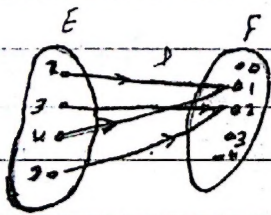
$$x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$

كل مورفزم الترتيب تماماً :  $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$   
 والتحليج المتناقص :  $x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$   
 والتحليج المتناقص تماماً :  $x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$

ملامح :  
 (1) التحليج التام يتكون بنفس الوقت ترتيب ومتناقص ولكن العكس صحيح بالضرورة

مثال :  
 لكن المجموعة  $\{1, 2, 3, 4\}$  مرتبة بملامح يتم و  $F = N$  مع علامة الترتيب  
 العادية . نعرف  $f$  كما يلي :

$f(1) = f(2) = 1$  ,  $f(3) = f(4) = 2$  فإن  $f$  يكون ترتيب ومتناقص بنفس الوقت  
 ولكنه ليس تاماً



$$2 \leq 4 \Rightarrow f(2) \leq f(4) \quad \text{ترتيب } 2$$

$$3 \leq 4 \Rightarrow f(3) \leq f(4) \quad \text{ترتيب } 2$$

$$f(3) \geq f(4) \quad f(1) \geq f(2) \quad f(3) \geq f(4)$$

(2) كل تحليج ترتيب ومتناقص يكون ترتيب تماماً ولكن بالضرورة أن كل تحليج ترتيب تماماً ليس متناقصاً

$$f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = f(4) = 2$$

ملامح  $f$  ترتيب تماماً ولكنه ليس متناقصاً



## محاضرات الدفتر

### المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

(3) إذا كان  $f$  متزايدة، فإن الدالة العكسية له أي  $f^{-1}$  لا يكون بالضرورة متزايدة.

مثال:  
إذا كانت  $F = \{2, 3, 4\}$  والعلاقة المعرفة على  $F$  علاقة تقسيم  $R = 1$   
و  $F = \{2, 4, 8\}$  والعلاقة المعرفة على  $F$  علاقة تقسيم  $R = 1$   
والجواب: نعم، لا، لا.

$$f(2) = 2 \qquad f(3) = 4 \qquad f(4) = 8$$

نلاحظ ان  $f$  متزاية ومتناهي ولكن نقطة العكس :

$$f^{-1}(2) = 2 \quad f^{-1}(4) = 3 \quad f^{-1}(f(8)) = 2$$

۷۱

$$2 \leq u \Rightarrow f^{-1}(2) \neq f^{-1}(u)$$

مسائل آخر:

التجسيع الداخلي من (1,  $N_1$ ) ثم (2,  $N_2$ ) هو تقابل قتراني ولكن تجسيعه الخارجي ليس قتراني